



Exercice(1)

On définit sur \mathbb{R} la loi interne \perp par : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) a \perp b = \sqrt{e^{\ln(1+a^2)\ln(1+b^2)} - 1}$

- 1) montrer que \perp est commutative ; associative dans \mathbb{R}
- 2) a) montrer que \mathbb{R}^{*+} est une partie stable dans (\mathbb{R}, \perp)
 b) montrer que (\mathbb{R}^{*+}, \perp) est un groupe commutatif
- 3) soit f l'application de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ telle que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) = \ln(1+x^2)$
 a) montrer que f est un isomorphisme de (\mathbb{R}^+, \perp) vers (\mathbb{R}^+, \times)
 b) déterminer $f^{-1}([1, +\infty[)$ et déduire que $[\sqrt{e-1}, +\infty[$ est stable dans (\mathbb{R}^+, \perp)

Exercice(2)

Soit m un paramètre complexe . on considère dans \mathbb{C} l'équation

$$(E) Z^3 + (2-i)Z^2 + (m^2 + 1 - 2i)Z - i(m^2 + 1) = 0$$

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

Parti(1)

- 1) a) vérifier que $Z_i = i$ est une solution de (E)
 b) résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)
- 2) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que deux au moins des solutions de (E) aient même module
- 3) on pose $Z_2 = -1 - im$; $Z_1 = -1 + im$ et on suppose $m = e^{i\theta}$; $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
 Ecrire Z_1 ; Z_2 sous forme trigonométrique

Parti(2)

On considère les points M_2 ; M_1 ; M d'affixes respectivement Z_2 ; Z_1 ; m

- 1) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M_2 ; M_1 ; M soient alignés
- 2) on suppose $\overline{m}m + \operatorname{Re}(m) \neq 0$.
 soit R l'application qui transforme $N(z)$ au point $N'(z')$ telle que $z' = -1 + iz$
 a) montrer que R est une rotation en déterminant le centre Ω et l'angle ϕ
 b) montrer que $\frac{Z_2 - m}{Z_2 - Z_1}$ est imaginaire si et seulement si $\overline{m}m - \operatorname{Im}(m) = 0$
 c) déduire l'ensemble des points $M(m)$ tel que M_2 ; M_1 ; M et Ω cocyclique

Exercice(3)

On considère dans \mathbb{N}^{*2} l'équation $(E) : 2^x - 3^y = 1$ et soit (x, y) un élément de \mathbb{N}^{*2} solution de (E)

- 1) soit m un entier naturel tel que $2^m \equiv 1 [9]$.



montrer que $m > 3$ et déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $2^n \equiv 1 \pmod{9}$

2) a) montrer que si $y > 1$ alors $2^x \equiv 1 \pmod{9}$ puis déduire que $6 \mid x$

b) montrer que $2^x \equiv 1 \pmod{63}$

3) déterminer l'ensemble des solutions de (E)

Exercice (4)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction P_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $p_n(x) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$

(A) 1) montrer que $(\forall x \geq 0) \quad P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$

2) étudier les variations de P_n et dresser le tableau de variation

3) montrer que $P_n(1) < 0$

4) a) vérifier que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n(2) \geq 0$

5) montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution x_n et $1 < x_n \leq 2$

(B) 1) montrer que $(\forall x \geq 0) \quad P_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$

2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$

3) montrer que $(\forall t \geq 1) \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$

4) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2} (x_n - 1)^2$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln 2}{n}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Exercice (5)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

1) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $a = 0$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f)

2) a) calculer la dérivée $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f

b) montrer que $(\forall x > 0) \quad f''(x) = \frac{e^x (e^x - 2)}{4\sqrt{(e^x - 1)^3}}$ et étudier la concavité de (C_f)



3) tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

4) soit G la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(1+\tan^2 x)} f(t) dt$

a) étudier le sens de variation de $g(x) = \ln(1 + \tan^2 x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b) montrer que G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $G'(x) = 2 \tan^2 x$

c) déduire une expression de $G(x)$

5) calculer l'aire du domaine limite par la courbe (C_f) et les droites $x = \ln 2$; $x = 0$; $y = 0$